Soluție

1. a) Se arată că $rang\,(A) = 2$.

b) Calcul direct, sau, deoarece $rang\,(A^t \cdot A) \leq rang\,(A) = 2$, rezultă că $\det(A^t \cdot A) = 0$.

c) De exemplu $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $4 \circ 5 \circ 6 = 9$.

b) Se demonstrează că funcția f este bijectivă și $\forall\, x, y \in (0, \infty)$, $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

c) Fie $q \in \mathbb{Q}$, $q > 3$. Atunci, există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $q = 3 + \dfrac{m}{n}$.

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, avem $k = 3 + t \in H$ şi deoarece H este subgrup al lui G, rezultă că şi simetricul $k' = \dfrac{1}{t} + 3 \in H$.

Deci $m + 3, \dfrac{1}{n} + 3 \in H$, de unde şi $(m+3) \circ \left(\dfrac{1}{n} + 3\right) = \dfrac{m}{n} + 3 = q \in H$.